

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 050

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer All Question. All Question carry equal marks.

इकाई/Unit-I

1. (a) निम्नलिखित समीकरण का श्रेणी हल ज्ञात कीजिए।

Solve the following equation in series.

$$(1 + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

- (b) सिद्ध कीजिए।

Prove that.

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}j_n(x)) = -x^{-n}j_{n+1}(x)$$

अथवा/OR

- (a)
- $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 2$
- को लेजान्द्रे बहुपदों में व्यक्त कीजिए।

Express $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 2$ in term of Legendre polynomials.

- (b) निम्नलिखित स्टर्म-ल्यूविल समस्या के समीकरण आइगेन मानों एवं आइगेन फलनों को ज्ञात कीजिए।

Find all the eigen values and eigen function of the following sturm-Liouville problem.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

इकाई/Unit-II

2. (a) ज्ञात कीजिए:- Find it

$$(i) L\{\sin 2t \cos 3t\} \quad (ii) L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\}$$

- (b) ज्ञात कीजिए:- Find

$$(i) L^{-1}\left\{\frac{2p+3}{(p-1)(p+2)^2}\right\} \quad (ii) L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p+a}}\right\}$$

अथवा/OR

- (a) द्वितीय स्थानान्तरण प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove second shifting theorem.

- (b) हल कीजिए:- Solve it

$$y'' - ty' + y = 1 \quad \text{if } y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

इकाई/Unit-III

3. (a) सम्बन्ध
- $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$
- से स्वेच्छ फलन
- f
- का विलोपन कीजिए।

Eliminate the arbitrary function f from the relation $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$

- (b) हल कीजिए:- Solve it

$$p \tan x + q \tan y = \tan z$$

अथवा/OR

- (a) पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

Find complete integral

$$x^2 p^2 + y^2 q^2 = z^2$$

- (b) चारपिट विधि से हल कीजिए।

Solve by Charpit's method.

$$px + qy = pq$$

इकाई/Unit-IV

4. (a) हल कीजिए:- Solve it

$$t + s + q = 0$$

- (b) हल कीजिए:- Solve it

$$(D^2 - 2DD' + D'^2)Z = \sin(2x + 3y)$$

अथवा/OR

- (a) हल कीजिए:- Solve it

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy$$

- (b) मोन्जे विधि से हल कीजिए।

Solve by Monje's method.

$$y^2 r - 2ys + t = p + 6y$$

इकाई/Unit-V

- (a) फलनों के चरम को परिभाषित कीजिए। अन्तराल $[0, 1]$ में वक्रों $y = x$ एवं $y = x^2$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

Define extremals of functional. Find the distance between the curves $y = x$ and $y = x^2$ in the interval $[0, 1]$

- (b) स्थिर परिसीमा बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) सहित उस वक्र को ज्ञात कीजिए जिसके x अक्ष के परितः परिभ्रमण में न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल वाला परिक्रमण पृष्ठ प्राप्त होता है।

Find the curve with fixed boundary point (x_1, y_1) and (x_2, y_2) such that its rotation about x -axis give rise to a surface of revolution of minimum surface area.

अथवा/OR

- (a) फलनक $F[y(x)] = \int_0^{\log 2} (e^{-x} y'^2 - e^x y^2) dx$ के चरम ज्ञात करने की समस्या में निर्देशांक रूपान्तरण के अन्तर्गत आयलर समीकरण की निश्चिता का सत्यापन कीजिए।
Verify invariance of Euler's equation under co-ordinates transformation in the problem of finding the external of the functional

$$F[y(x)] = \int_0^{\log 2} (e^{-x} y'^2 - e^x y^2) dx$$

- (b) परवलय $y = x^2$ और सरल रेखा $x - y = 5$ के बीच की लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the parabola $y = x^2$ and the straight line $x - y = 5$